Heinrich-Heine-Universität
Jun.-Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Dr. Peter Arndt

Sommersemester 2017
26.04.2017

Lineare Algebra I
Blatt 2

---

1 | Dienst nach Vorschrift

Welche der folgenden Abbildungsvorschriften beschreiben wohldefinierte Abbildungen? Welche der wohldefinierten Abbildungen sind injektiv, welche surjektiv?

(a) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

(b) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$

(c) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x^2 \mapsto x$

(d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$

(e) $\mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\dfrac{a}{b} \mapsto \dfrac{b}{a}$

(f) $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto \begin{cases} n-1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n+1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

(g) $\mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$, $n \mapsto$ Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von n

Geben Sie zu den bijektiven Abbildungen jeweils die Umkehrabbildung an.

2 | Schnittbild

Das Bilden von Urbildern vertauscht mit Vereinigungen und Schnitten: für beliebige Abbildungen $f\colon M \to N$ und beliebige Familien von Teilmengen $N_i \subseteq N$ gilt

$$f^{-1}(\textstyle\bigcup_{i\in I} N_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(N_i) \qquad \text{und} \qquad f^{-1}(\bigcap_{i\in I} N_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(N_i).$$

Wie sieht es mit Bildern aus? Gilt auch $f(\bigcup_{i\in I} M_i) = \bigcup_{i\in I} f(M_i)$ für beliebige Teilmengen $M_i \subseteq M$? Gilt $f(\bigcap_{i\in I} M_i) = \bigcap_{i\in I} f(M_i)$?

3 | Binomis Baukasten

Sei M eine endliche Menge mit n Elementen.

(a) Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ ist wieder endlich. Aus wie vielen Elementen besteht sie?

(b) Ist M nicht leer, so sind die Menge $\mathfrak{P}^0(M) \subset \mathfrak{P}(M)$ der Teilmengen, die aus einer geraden Anzahl von Elementen bestehen, und die Menge $\mathfrak{P}^1(M)$ der Teilmengen, die aus einer ungeraden Anzahl von Elementen bestehen, gleich mächtig.

(c) Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist definiert als die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge. Aus dem vorherigen Aufgabenteil folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$.

4 | Machtdemonstration

Die Potenzmenge einer Menge ist stets mächtiger als die Menge selbst: für jede Menge M existiert eine injektive Abbildung $M \to \mathfrak{P}(M)$, aber für keine Menge M existiert eine solche Abbildung, die bijektiv ist.

Bitten werfen Sie Ihre Lösungen in die dafür vorgesehenen Briefkästen in Gebäude 25.22., Etage 00, ein. Es gibt für jede Aufgabe einen separaten Briefkasten. Versehen Sie jede Lösung mit Ihrem Namen und der Nummer Ihrer Übungsgruppe. Die Frist für den Früheinwerferbonus verschiebt sich wegen des Feiertags auf Dienstag, den 2. Mai, 10:30 Uhr. Die reguläre Abgabefrist läuft bis Mittwoch, den 3. Mai, 10:30 Uhr.